

K.A. Stroud
Dexter J. Booth

MATEMATYKA

OD ZERA DLA INŻYNIERA

WYDANIE VIII

Z języka angielskiego przełożyły

Agnieszka Apenuvor
Zofia Denkowska
Agnieszka Jarosz

Korekta merytoryczna tłumaczenia
prof. dr hab. Tadeusz Stanisław

Pętla



macmillan
international
HIGHER EDUCATION



RED GLOBE
PRESS

Tytuł oryginału: Engineering Mathematics (8th Edition)

First published in English under the title

Engineering Mathematics by K.A. Stroud and Dexter Booth, edition: 8.

Copyright © K.A. Stroud 1970, 1982, 1987, 1995

Copyright © K. A Stroud and Dexter J. Booth under exclusive licence to Macmillan

Education Limited 2001, 2007, 2013, 2020

This edition has been translated and published under licence from Macmillan Education Limited, part of Springer Nature.

Macmillan Education Limited, part of Springer Nature takes no responsibility and shall not be made liable for the accuracy of the translation.

Copyright © for the translation by Pętla Sp. z o.o. 2016, 2021

Copyright © for the Polish edition by Pętla Sp. z o.o. 2016, 2021

Wszystkie prawa zastrzeżone. Kopiowanie i rozpowszechnianie całości albo fragmentów tej książki - z wyjątkiem cytatów w artykułach i przeglądach krytycznych - możliwe jest tylko na podstawie pisemnej zgody właściciela praw autorskich.

Tłumaczenie i redakcja **Agnieszka Jarosz**

Korekta merytoryczna tłumaczenia **prof. dr hab. Tadeusz Stanisław**

Współtwórcy poprzedniego wydania:

Tłumaczenie **Agnieszka Apenuvor, Zofia Denkowska, Agnieszka Jarosz**

Korekta merytoryczna tłumaczenia **prof. dr hab. Tadeusz Stanisław**

Redakcja **Agnieszka Jarosz**

Oprawa graficzna i skład **Daniel Zarymbowski**

ISBN 978-83-944283-1-0

Pętla Sp. z o.o.

<http://www.stroud.edu.pl/>

info@stroud.edu.pl

tel. 508 270 779



Skrócony spis treści

Część I Tematy podstawowe

| | | |
|------|--|-----|
| F.1 | Arytmetyka | 3 |
| F.2 | Wprowadzenie do algebry | 63 |
| F.3 | Wyrażenia i równania | 97 |
| F.4 | Wykresy | 123 |
| F.5 | Równania liniowe | 157 |
| F.6 | Równania wielomianowe | 173 |
| F.7 | Dwumian Newtona | 187 |
| F.8 | Ułamki proste | 215 |
| F.9 | Trygonometria | 235 |
| F.10 | Funkcje | 259 |
| F.11 | Funkcje trygonometryczne i wykładnicze | 279 |
| F.12 | Różniczkowanie | 309 |
| F.13 | Całkowanie | 347 |

Część II

| | | |
|----|--|------|
| 1 | Liczby zespolone 1 | 379 |
| 2 | Liczby zespolone 2 | 406 |
| 3 | Funkcje hiperboliczne | 431 |
| 4 | Wyznaczniki | 453 |
| 5 | Macierze | 484 |
| 6 | Wektory | 519 |
| 7 | Różniczkowanie | 544 |
| 8 | Zastosowania różniczkowania | 563 |
| 9 | Styczne, normalne i krzywizny | 585 |
| 10 | Ciągi | 607 |
| 11 | Szeregi 1 | 642 |
| 12 | Szeregi 2 | 666 |
| 13 | Krzywe i dopasowanie krzywej | 692 |
| 14 | Pochodne cząstkowe 1 | 736 |
| 15 | Pochodne cząstkowe 2 | 757 |
| 16 | Całkowanie 1 | 773 |
| 17 | Całkowanie 2 | 800 |
| 18 | Całkowanie z użyciem wzorów rekurencyjnych | 828 |
| 19 | Zastosowania całkowania 1 | 841 |
| 20 | Zastosowania całkowania 2 | 859 |
| 21 | Zastosowania całkowania 3 | 881 |
| 22 | Całkowanie numeryczne | 910 |
| 23 | Układ współrzędnych biegunowych | 929 |
| 24 | Całki wielokrotne | 951 |
| 25 | Równania różniczkowe pierwszego rzędu | 977 |
| 26 | Równania różniczkowe drugiego rzędu | 1013 |
| 27 | Wprowadzenie do transformat Laplace'a | 1036 |
| 28 | Przetwarzanie danych i statystyka | 1054 |
| 29 | Prawdopodobieństwo | 1085 |

Strona celowo pozostawiona pusta

Spis treści

| | |
|--|--------------|
| <i>Przedmowa do pierwszego wydania</i> | <i>xix</i> |
| <i>Przedmowa do drugiego wydania</i> | <i>xx</i> |
| <i>Przedmowa do trzeciego wydania</i> | <i>xxi</i> |
| <i>Przedmowa do czwartego wydania</i> | <i>xxii</i> |
| <i>Przedmowa do ósmego wydania</i> | <i>xxiii</i> |
| <i>Od wydawcy polskiej edycji</i> | <i>xxiv</i> |
| <i>Jak korzystać z tej książki</i> | <i>xxv</i> |
| <i>Przydatne informacje</i> | <i>xxvii</i> |

Część I Tematy podstawowe **1**

Program F.1 Arytmetyka **3**

| | |
|--|----|
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 3 |
| <i>Quiz F.1</i> | 4 |
| Typy liczb | 6 |
| Liczby naturalne - Cyfry i pozycyjność - Punkty na osi i porządek - Liczby całkowite - Nawiasy - Dodawanie i odejmowanie - Mnożenie i dzielenie - Nawiasy i kolejność wykonywania działań - Podstawowe prawa arytmetyki - Szacowanie - Zaokrąglanie - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Czynniki, dzielniki i liczby pierwsze | 15 |
| Czynniki i dzielniki - Liczby pierwsze - Rozkład na czynniki pierwsze - Podstawowe twierdzenie arytmetyki - Największy wspólny dzielnik (NWD) - Najmniejsza wspólna wielokrotność (NWW) - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Ułamki, stosunki i procenty | 18 |
| Dzielenie liczb całkowitych - Mnożenie ułamków - Z - Równość ułamków - Dzielenie ułamków - Dodawanie i odejmowanie ułamków - Ułamki na kalkulatorze - Stosunki - Procenty - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Ułamki dziesiętne | 27 |
| Dzielenie liczb całkowitych - Zaokrąglanie - Cyfry znaczące - Miejsca po przecinku - Zera końcowe - Ułamki zwykłe w postaci dziesiętnej - Ułamki w postaci dziesiętnej jako ułamki zwykłe - Ułamki dziesiętne nieskończone - Ułamki w postaci dziesiętnej jako ułamki zwykłe - Liczby wymierne, niewymierne i rzeczywiste - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Potęgi | 33 |
| Podnoszenie liczby do potęgi - Prawa potęgowania - Potęgowanie na kalkulatorze - Potęgi o wykładniku ułamkowym i pierwiastki - Liczby niewymierne - Mnożenie i dzielenie liczb całkowitych przez potęgi 10 - Kolejność wykonywania działań - Postać wykładnicza - Wyprowadzanie postaci wykładniczej - Użycie kalkulatora - Postać inżynierska - Sprawdzanie obliczeń - Dokładność - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Systemy liczbowe | 44 |
| System dziesiętny - System binarny (dwójkowy) - System ósemkowy - System dwunastkowy - System szesnastkowy - Metoda alternatywna - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Zamiana podstawy z dziesiętnej na inną | 52 |
| Postać dwójkowa - Postać ósemkowa - Postać dwunastkowa - Zamiana ułamka w systemie dziesiętnym na postać ósemkową - Użycie liczb w systemie ósemkowym jako etapu pośredniego | |
| Metoda odwrotna | 56 |

| | |
|--|------------|
| Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.1</i> | 58 |
| <i>Zadania sprawdzające F.1</i> | 59 |
| <i>Dalsze wyzwania F.1</i> | 60 |
| Program F.2 Wprowadzenie do algebry | 63 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 63 |
| <i>Quiz F.2</i> | 64 |
| Wyrażenia algebraiczne | 65 |
| Symbole inne niż cyfry - Stałe - Zmienne - Reguły algebry - Kolejność wykonywania działań - Wyrazy i współczynniki - Redukcja wyrazów podobnych - Wyrazy analogiczne - wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias - Usuwanie nawiasów - Nawiasy zagnieżdżone - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Potęgi i logarytmy | 72 |
| Potęgi - Reguły dotyczące potęg - Logarytmy - Reguły dotyczące logarytmów - Podstawa 10 i podstawa e - Zamiana podstawy - Równania logarytmiczne - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Mnożenie i dzielenie wyrażeń algebraicznych | 81 |
| Mnożenie - Dzielenie - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Ułamki algebraiczne | 85 |
| Dodawanie i odejmowanie - Mnożenie i dzielenie - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Rozkład wyrażeń algebraicznych na czynniki | 89 |
| Wspólne czynniki - Wspólne czynniki uzyskane przez grupowanie - Wzory skróconego mnożenia - Wyrażenia kwadratowe będące iloczynami czynników liniowych - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.2</i> | 93 |
| <i>Zadania sprawdzające F.2</i> | 94 |
| <i>Dalsze wyzwania F.2</i> | 95 |
| Program F.3 Wyrażenia i równania | 97 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 97 |
| <i>Quiz F.3</i> | 98 |
| Wyrażenia i równania | 99 |
| Obliczanie wartości wyrażeń - Równania - Obliczanie wartości zmiennych niezależnych - Przekształcanie wzorów - Proces obliczania wartości - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Wielomiany | 109 |
| Wyrażenia wielomianowe - Obliczanie wartości wielomianów - Obliczanie wartości wielomianów metodą Hornera - Twierdzenie o resztach (twierdzenie Bézouta) - Twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki - Rozkład na czynniki wielomianów czwartego stopnia - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.3</i> | 120 |
| <i>Zadania sprawdzające F.3</i> | 121 |
| <i>Dalsze wyzwania F.3</i> | 121 |
| Program F.4 Wykresy | 123 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 123 |
| <i>Quiz F.4</i> | 124 |

| | |
|--|------------|
| Wykresy równań | 125 |
| Równania - Uporządkowane pary liczb - Kartezjański układ współrzędnych - Rysowanie wykresów - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Stosowanie arkuszy kalkulacyjnych | 133 |
| Arkusze kalkulacyjne - Wiersze i kolumny - Wpisywanie tekstu i liczb - For- muły - Usuwanie wpisów - Sporządzanie wykresów w kartezjańskim układzie współrzędnych - Sposoby prezentacji - Podsumowanie - Ćwiczenia na po- wtórzenie | |
| Nierówności | 142 |
| Większe niż i mniejsze niż - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Wartości bezwzględne | 144 |
| Moduł - Wykresy - Nierówności - Interakcja - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.4</i> | 153 |
| <i>Zadania sprawdzające F.4</i> | 154 |
| <i>Dalsze wyzwania F.4</i> | 154 |
| Program F.5 Równania liniowe | 157 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 157 |
| <i>Quiz F.5</i> | 158 |
| Równania liniowe | 159 |
| Rozwiązywanie równań prostych - Układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi - Układy trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi - Wstępne przekształcenia - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.5</i> | 169 |
| <i>Zadania sprawdzające F.5</i> | 170 |
| <i>Dalsze wyzwania F.5</i> | 170 |
| Program F.6 Równania wielomianowe | 173 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 173 |
| <i>Quiz F.6</i> | 174 |
| Równania wielomianowe | 175 |
| Równania kwadratowe - Równania trzeciego stopnia z przynajmniej jednym czynnikiem liniowym - Równania czwartego stopnia z co najmniej dwoma czynnikiem liniowymi - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.6</i> | 184 |
| <i>Zadania sprawdzające F.6</i> | 185 |
| <i>Dalsze wyzwania F.6</i> | 185 |
| Program F.7 Dwumian Newtona | 187 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 187 |
| <i>Quiz F.7</i> | 188 |
| Silnia i kombinacje | 189 |
| Silnia - Kombinacje - Trzy własności współczynników dwumianowych - Pod- sumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Dwumian Newtona | 197 |
| Trójkąt Pascala - Wzór dwumianowy Newtona - Wyraz ogólny rozwinięcia dwumianowego - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Zapis przy użyciu znaku Σ (sigma) | 203 |
| Wyrazy ogólne sumy w zapisie ze znakiem Σ - Suma n początkowych liczb naturalnych - Reguły działania na sumach - Liczba e - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.7</i> | 212 |

| | |
|---|------------|
| <i>Zadania sprawdzające F.7</i> | 213 |
| <i>Dalsze wyzwania F.7</i> | 213 |
| Program F.8 Ułamki proste | 215 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 215 |
| <i>Quiz F.8</i> | 216 |
| Ułamki proste | 217 |
| Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Mianowniki z powtarzającymi się i kwadratowymi czynnikami | 224 |
| Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.8</i> | 232 |
| <i>Zadania sprawdzające F.8</i> | 232 |
| <i>Dalsze wyzwania F.8</i> | 232 |
| Program F.9 Trygonometria | 235 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 235 |
| <i>Quiz F.9</i> | 236 |
| Kąty | 237 |
| Obrót - Radiany - Trójkąty - Funkcje trygonometryczne - Odwrotności funkcji trygonometrycznych - Twierdzenie Pitagorasa - Trójkąty specjalne - Połowa trójkąta równobocznego - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Tożsamości trygonometryczne | 250 |
| Jedynka trygonometryczna - Dodatkowe dwie tożsamości - Tożsamości dla kątów złożonych - Wzory trygonometryczne - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.9</i> | 256 |
| <i>Zadania sprawdzające F.9</i> | 256 |
| <i>Dalsze wyzwania F.9</i> | 257 |
| Program F.10 Funkcje | 259 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 259 |
| <i>Quiz F.10</i> | 260 |
| Przetwarzanie liczb | 261 |
| Funkcje jako reguły, lecz nie wszystkie reguły jako funkcje - Funkcje i działania arytmetyczne - Funkcje odwrotne - Wykresy funkcji odwrotnych - Wykres funkcji $y = x^3$ - Wykres funkcji $y = x^{1/3}$ - Wykres funkcji $y = x^3$ i $y = x^{1/3}$ w jednym układzie współrzędnych - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Złożenie | 272 |
| Funkcja złożona - Funkcje odwrotne do funkcji złożonych - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.10</i> | 276 |
| <i>Zadania sprawdzające F.10</i> | 277 |
| <i>Dalsze wyzwania F.10</i> | 277 |
| Program F.11 Funkcje trygonometryczne i wykładnicze | 279 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 279 |
| <i>Quiz F.11</i> | 280 |
| Wprowadzenie | 281 |
| Funkcje trygonometryczne | 281 |
| Obrót - Tangens - Okres - Amplituda - Przesunięcie fazowe - Funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych - Równania trygonometryczne - Równania w postaci $a \cos x + b \sin x = c$ - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |

| | |
|--|------------|
| Funkcje wykładnicze i logarytmiczne | 295 |
| Funkcje wykładnicze - Równania wykładnicze - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Funkcje parzyste i nieparzyste | 299 |
| Części parzyste i nieparzyste - Część parzysta i nieparzysta funkcji wykładniczej - Granice funkcji - Działania na granicach - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.11</i> | 304 |
| <i>Zadania sprawdzające F.11</i> | 305 |
| <i>Dalsze wyzwania F.11</i> | 306 |
| Program F.12 Różniczkowanie | 309 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 309 |
| <i>Quiz F.12</i> | 310 |
| Współczynniki kierunkowe i gradienty | 311 |
| Współczynnik kierunkowy prostej - Gradient krzywej w danym punkcie - Określenie gradientu krzywej metodami algebraicznymi - Pochodne potęg x - Różniczkowanie wielomianów - Pochodne drugiego i wyższego rzędu oraz zapis alternatywny - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Standardowe pochodne i reguły | 324 |
| Granica $\sin\theta/\theta$ dla $\theta \rightarrow 0$ - Standardowe pochodne - Pochodna iloczynu funkcji - Pochodna ilorazu dwóch funkcji - Pochodna funkcji złożonej - Pochodna $y = a^x$ - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Metoda iteracyjna Newtona | 338 |
| Zapis - Tabelaryczne przedstawienie wyników - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.12</i> | 344 |
| <i>Zadania sprawdzające F.12</i> | 345 |
| <i>Dalsze wyzwania F.12</i> | 346 |
| Program F.13 Całkowanie | 347 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 347 |
| <i>Quiz F.13</i> | 348 |
| Całkowanie | 349 |
| Stała całkowania - Całki standardowe - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Całkowanie wielomianów | 352 |
| Funkcje funkcji liniowej x - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Całkowanie funkcji wymiernej z użyciem rozkładu na ułamki proste | 357 |
| Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Pola obszarów pod krzywymi | 360 |
| Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Całkowanie jako sumowanie | 364 |
| Pole figury ograniczonej krzywą i przecinającą ją prostą - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna F.13</i> | 373 |
| <i>Zadania sprawdzające F.13</i> | 374 |
| <i>Dalsze wyzwania F.13</i> | 375 |

Część II 377

Program 1 Liczby zespolone 1 379

| | |
|---|-----|
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 379 |
| Wprowadzenie | 380 |
| Pojęcia i symbole | |
| Symbol i | 380 |
| Równania kwadratowe | |
| Potęgi i | 383 |
| Potęgi o wykładniku całkowitym dodatnim - Potęgi o wykładniku całkowitym ujemnym | |
| Liczby zespolone | 384 |
| Dodawanie i odejmowanie - Mnożenie - Dzielenie - Równość liczb zespolonych - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Przedstawienie graficzne liczb zespolonych | 393 |
| Diagram Arganda - Interpretacja geometryczna sumy liczb zespolonych | |
| Postać trygonometryczna liczb zespolonych | 395 |
| Postać wykładnicza liczb zespolonych | 400 |
| Podsumowanie | 402 |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 1</i> | 403 |
| <i>Zadania sprawdzające 1</i> | 403 |
| <i>Dalsze wyzwania 1</i> | 404 |

Program 2 Liczby zespolone 2 406

| | |
|---|-----|
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 406 |
| Obliczenia dla postaci trygonometrycznej | 407 |
| Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Pierwiastki liczby zespolonej | 415 |
| Rozwinięcia | 421 |
| Rozwinięcia $\sin n\theta$ i $\cos n\theta$ - Rozwinięcia $\cos^n\theta$ i $\sin^n\theta$ | |
| Miejsca geometryczne | 424 |
| Podsumowanie | 427 |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 2</i> | 428 |
| <i>Zadania sprawdzające 2</i> | 428 |
| <i>Dalsze wyzwania 2</i> | 429 |

Program 3 Funkcje hiperboliczne 431

| | |
|--|-----|
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 431 |
| Wprowadzenie | 432 |
| Wykresy funkcji hiperbolicznych | 434 |
| Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Obliczanie wartości funkcji hiperbolicznych | 439 |
| Funkcje odwrotne względem funkcji hiperbolicznych | 440 |
| Postać logarytmiczna funkcji odwrotnych do funkcji hiperbolicznych | 442 |
| Tożsamości hiperboliczne | 445 |
| Zależności pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi i hiperbolicznymi | 447 |
| Podsumowanie | 450 |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 3</i> | 451 |
| <i>Zadania sprawdzające 3</i> | 451 |
| <i>Dalsze wyzwania 3</i> | 452 |

Program 4 Wyznaczniki 453

| | |
|--|------------|
| Podsumowanie | 540 |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 6</i> | 541 |
| <i>Zadania sprawdzające 6</i> | 541 |
| <i>Dalsze wyzwania 6</i> | 542 |
| Program 7 Różniczkowanie | 544 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 544 |
| Pochodne standardowe | 545 |
| Złożenie funkcji | 546 |
| Iloczyny - Ilorazy | |
| Pochodna logarytmiczna | 552 |
| Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Funkcje uwikłane | 555 |
| Równania parametryczne | 557 |
| Podsumowanie | 559 |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 7</i> | 560 |
| <i>Zadania sprawdzające 7</i> | 560 |
| <i>Dalsze wyzwania 7</i> | 561 |
| Program 8 Zastosowania różniczkowania | 563 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 563 |
| Różniczkowanie funkcji odwrotnych do funkcji trygonometrycznych | 564 |
| Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Pochodne funkcji odwrotnych do funkcji hiperbolicznych | 566 |
| Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Wartości minimum i maksimum | 571 |
| Punkty przegięcia | 575 |
| Podsumowanie | 581 |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 8</i> | 581 |
| <i>Zadania sprawdzające 8</i> | 582 |
| <i>Dalsze wyzwania 8</i> | 582 |
| Program 9 Styczne, normalne i krzywizny | 585 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 585 |
| Równanie prostej | 586 |
| Styczne i normalne do krzywej w danym punkcie | 589 |
| Krzywizna | 594 |
| Środek krzywizny | |
| Podsumowanie | 603 |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 9</i> | 604 |
| <i>Zadania sprawdzające 9</i> | 604 |
| <i>Dalsze wyzwania 9</i> | 605 |
| Program 10 Ciągi | 607 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 607 |
| Funkcje określone dla liczb całkowitych | 608 |
| Ciągi - Wykresy ciągów - Ciąg arytmetyczny - Ciąg geometryczny - Ciąg harmoniczny - Określenie rekurencyjne - Inne ciągi - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Równania różnicowe | 620 |
| Rozwiązywanie równań różnicowych - Równania jednorodnego drugiego rzędu - Równe pierwiastki równania charakterystycznego - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |

| | |
|---|------------|
| Granice ciągów | 629 |
| Nieskończoność - Granice - Granice nieskończone - Reguły dotyczące granic - Symbole nieoznaczone (granice nieokreślone) - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 10</i> | 637 |
| <i>Zadania sprawdzające 10</i> | 638 |
| <i>Dalsze wyzwania 10</i> | 639 |
| Program 11 Szeregi 1 | 642 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 642 |
| Szeregi | 643 |
| Szeregi arytmetyczne - Średnia arytmetyczna - Szeregi geometryczne - Średnia geometryczna | |
| Szeregi liczb naturalnych w ustalonej potędze | 648 |
| Suma liczb naturalnych - Suma kwadratów - Suma sześciąt | |
| Szeregi nieskończone | 651 |
| Granice | 653 |
| Szeregi zbieżne i rozbieżne - Testy zbieżności - Zbieżność bezwzględna | |
| Podsumowanie | 662 |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 11</i> | 663 |
| <i>Zadania sprawdzające 11</i> | 663 |
| <i>Dalsze wyzwania 11</i> | 664 |
| Program 12 Szeregi 2 | 666 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 666 |
| Szeregi potęgowe | 667 |
| Wprowadzenie - Szereg Maclaurina - Szeregi standardowe - Szeregi dwumianowe | |
| Wartości przybliżone | 677 |
| Szereg Taylora | |
| Granice funkcji – symbole nieoznaczone | 680 |
| Reguła de l'Hospitala do wyznaczania granic wyrażeń nieoznaczonych | |
| Podsumowanie | 687 |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 12</i> | 688 |
| <i>Zadania sprawdzające 12</i> | 689 |
| <i>Dalsze wyzwania 12</i> | 689 |
| Program 13 Krzywe i dopasowanie krzywej | 692 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 692 |
| Wprowadzenie | 693 |
| Standardowe krzywe | 693 |
| Linia prosta - Krzywe drugiego stopnia - Krzywe trzeciego stopnia - Okrąg - Elipsa - Hiperbola - Krzywe logarytmiczne - Krzywe wykładnicze - Krzywe hiperboliczne - Krzywe trygonometryczne - Tangensoida | |
| Asymptoty | 702 |
| Określenie asymptoty ukośnej - Asymptoty równoległe do osi x i y | |
| Systematyczne rysowanie krzywych na podstawie równania | 707 |
| Symetria - Punkty przecięcia z osiami - Przesunięcie względem początku układu współrzędnych - Asymptoty - Duże i małe wartości x i y - Punkty stacjonarne - Ograniczenia | |
| Dopasowywanie krzywej | 712 |
| Zależność liniowa - Wykresy w postaci $y = ax^n$, gdzie a i n są stałymi - Wy- kresy w postaci $y = ae^{nx}$ | |

| | |
|---|------------|
| Metoda najmniejszych kwadratów | 717 |
| Dopasowywanie linii prostej - Korzystanie z arkusza kalkulacyjnego | |
| Korelacja | 723 |
| Korelacja - Miary korelacji - Współczynnik korelacji iloczynu momentów Pearsona - Współczynnik korelacji rang Spearmana | |
| Podsumowanie | 730 |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 13</i> | 731 |
| <i>Zadania sprawdzające 13</i> | 732 |
| <i>Dalsze wyzwania 13</i> | 733 |
| Program 14 Pochodne cząstkowe 1 | 736 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 736 |
| Pochodne cząstkowe | 737 |
| Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Małe przyrosty | 749 |
| Podsumowanie | |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 14</i> | 754 |
| <i>Zadania sprawdzające 14</i> | 754 |
| <i>Dalsze wyzwania 14</i> | 755 |
| Program 15 Pochodne cząstkowe 2 | 757 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 757 |
| Pochodne cząstkowe | 758 |
| Prędkość zmiany | 760 |
| Zmiana zmiennych | 768 |
| Podsumowanie | 770 |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 15</i> | 770 |
| <i>Zadania sprawdzające 15</i> | 771 |
| <i>Dalsze wyzwania 15</i> | 771 |
| Program 16 Całkowanie 1 | 773 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 773 |
| Wprowadzenie | 774 |
| Całki standardowe | |
| Funkcje liniowej funkcji x | 777 |
| Całki w postaci $\int f'(x)/f(x)dx$ oraz $\int f(x) \cdot f'(x)dx$ | 779 |
| Całkowanie iloczynów – całkowanie przez części | 783 |
| Całkowanie z wykorzystaniem rozkładu na ułamki proste | 787 |
| Całkowanie funkcji trygonometrycznych | 792 |
| Podsumowanie | 796 |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 16</i> | 796 |
| <i>Zadania sprawdzające 16</i> | 797 |
| <i>Dalsze wyzwania 16</i> | 797 |
| Program 17 Całkowanie 2 | 800 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 800 |
| Podsumowanie | 824 |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 17</i> | 825 |
| <i>Zadania sprawdzające 17</i> | 826 |
| <i>Dalsze wyzwania 17</i> | 826 |

| | | |
|-------------------|--|------------|
| Program 18 | Całkowanie z użyciem wzorów rekurencyjnych | 828 |
| | <i>Czego się nauczę z tego rozdziału?</i> | 828 |
| | Podsumowanie | 838 |
| | <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 18</i> | 838 |
| | <i>Zadania sprawdzające 18</i> | 838 |
| | <i>Dalsze wyzwania 18</i> | 839 |
| Program 19 | Zastosowania całkowania 1 | 841 |
| | <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 841 |
| | Podstawowe zastosowania | 842 |
| | Obszar pod krzywą - Całki oznaczone | |
| | Równania parametryczne | 850 |
| | Wartości średnie | 851 |
| | Wartość średnia kwadratowa (RMS) | 853 |
| | Podsumowanie | 855 |
| | <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 19</i> | 856 |
| | <i>Zadania sprawdzające 19</i> | 856 |
| | <i>Dalsze wyzwania 19</i> | 857 |
| Program 20 | Zastosowania całkowania 2 | 859 |
| | <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 859 |
| | Wprowadzenie | 860 |
| | Objętość bryły obrotowej | 860 |
| | Środek geometryczny figury płaskiej | 864 |
| | Środek ciężkości bryły obrotowej | 867 |
| | Długość krzywej | 868 |
| | Równania parametryczne | |
| | Powierzchnia boczna bryły obrotowej | 872 |
| | Równania parametryczne | |
| | Reguła Pappusa-Guldina | 875 |
| | Podsumowanie | 876 |
| | <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 20</i> | 877 |
| | <i>Zadania sprawdzające 20</i> | 878 |
| | <i>Dalsze wyzwania 20</i> | 878 |
| Program 21 | Zastosowania całkowania 3 | 881 |
| | <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 881 |
| | Momenty bezwładności | 882 |
| | Promień bezwładności - Twierdzenie o osiach równoległych - Twierdzenie o osiach prostopadłych (dla cienkich płytek) - Przydatne wyniki standardowe | |
| | Geometryczny moment bezwładności | 896 |
| | Figury złożone | |
| | Środek parcia | 900 |
| | Ciśnienie w punkcie P o głębokości z poniżej lustra płynu - Całkowite parcie na pionową płytkę zanurzoną w płynie - Głębokość środka parcia | |
| | Podsumowanie | 906 |
| | <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 21</i> | 906 |
| | <i>Zadania sprawdzające 21</i> | 907 |
| | <i>Dalsze wyzwania 21</i> | 908 |
| Program 22 | Całkowanie numeryczne | 910 |
| | <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 910 |

| | |
|--|------------|
| Wprowadzenie | 911 |
| Całkowanie numeryczne | 912 |
| Za pomocą szeregów - Z użyciem metody Simpsona | |
| Dowód metody Simpsona | 924 |
| Podsumowanie | 925 |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 22</i> | 926 |
| <i>Zadania sprawdzające 22</i> | 926 |
| <i>Dalsze wyzwania 22</i> | 927 |
| Program 23 Układ współrzędnych biegunowych | 929 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 929 |
| Wprowadzenie do współrzędnych biegunowych | 930 |
| Krzywe biegunowe | 932 |
| Standardowe krzywe biegunowe | 934 |
| Zastosowania | 937 |
| Podsumowanie | 948 |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 23</i> | 949 |
| <i>Zadania sprawdzające 23</i> | 949 |
| <i>Dalsze wyzwania 23</i> | 950 |
| Program 24 Całki wielokrotne | 951 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 951 |
| Sumowanie w dwóch kierunkach | 952 |
| Całki podwójne | 955 |
| Całki potrójne | 957 |
| Zastosowania | 959 |
| Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Zapis alternatywny | 964 |
| Obliczenia pól powierzchni z użyciem całek wielokrotnych | 968 |
| Obliczanie objętości brył z użyciem całek wielokrotnych | 970 |
| Podsumowanie | 973 |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 24</i> | 974 |
| <i>Zadania sprawdzające 24</i> | 974 |
| <i>Dalsze wyzwania 24</i> | 975 |
| Program 25 Równania różniczkowe pierwszego rzędu | 977 |
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 977 |
| Wprowadzenie | 978 |
| Tworzenie równań różniczkowych | 979 |
| Rozwiązywanie równań różniczkowych | 981 |
| Za pomocą bezpośredniego całkowania - Przez rozdzielenie zmiennych - | |
| Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Rozwiązywanie równań różniczkowych | 988 |
| Równania jednorodne – przez podstawienie $y = vx$ - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Rozwiązywanie równań różniczkowych | 994 |
| Równania liniowe – użycie czynnika całkującego - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| Równanie Bernoulliego | 1002 |
| Podsumowanie | 1007 |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 25</i> | 1008 |
| <i>Ćwiczenia testowe 25</i> | 1009 |
| <i>Dalsze wyzwania 25</i> | 1009 |

| | | |
|-------------------|--|-------------|
| Program 26 | Równania różniczkowe drugiego rzędu | 1013 |
| | <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 1013 |
| | Równania jednorodne | 1014 |
| | Ćwiczenia na powtórzenie | |
| | Równania niejednorodne | 1022 |
| | Rozwiązanie szczególne | 1029 |
| | Podsumowanie | 1033 |
| | <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 26</i> | 1033 |
| | <i>Zadania sprawdzające 26</i> | 1034 |
| | <i>Dalsze wyzwania 26</i> | 1034 |
| Program 27 | Wprowadzenie do transformat Laplace'a | 1036 |
| | <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 1036 |
| | Transformata Laplace'a | 1037 |
| | Odwrotna transformata Laplace'a - Tabela transformat Laplace'a - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| | Transformata Laplace'a | 1041 |
| | Transformata Laplace'a pochodnej - Dwie własności transformat Laplace'a - Tabela transformat Laplace'a - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| | Transformata Laplace'a | 1045 |
| | Generowanie nowych transformat - Transformaty Laplace'a pochodnych wyższych rzędów - Tabela transformat Laplace'a - Równania różniczkowe niejednorodne, liniowe, o stałych współczynnikach - Podsumowanie - Ćwiczenia na powtórzenie | |
| | <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 27</i> | 1051 |
| | <i>Zadania sprawdzające 27</i> | 1052 |
| | <i>Dalsze wyzwania 27</i> | 1052 |
| Program 28 | Przetwarzanie danych i statystyka | 1054 |
| | <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | 1054 |
| | Wprowadzenie | 1055 |
| | Porządkowanie | 1055 |
| | Tabela zliczania metodą kreskową - Grupowanie danych - Grupowanie danych ciągłych - Częstość względna - Zaokrąglanie danych - Granice klas | |
| | Histogramy | 1062 |
| | Histogram częstości - Histogram częstości względnej | |
| | Miary tendencji centralnej | 1064 |
| | Średnia - Kodowanie przy obliczaniu średniej - Dekodowanie - Kodowanie w zgrupowanych rozkładach częstości - Moda - Moda w danych zgrupowanych - Mediana - Mediana z pogrupowanych danych | |
| | Miary rozproszenia | 1072 |
| | Średnie odchylenie - Rozstęp - Odchylenie standardowe - Alternatywny wzór na odchylenie standardowe | |
| | Krzywe rozkładu | 1075 |
| | Wielokąty częstości - Krzywe częstości - Krzywa rozkładu normalnego | |
| | Standaryzowana krzywa normalna | 1078 |
| | Podsumowanie | 1079 |
| | <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 28</i> | 1080 |
| | <i>Zadania sprawdzające 28</i> | 1081 |
| | <i>Dalsze wyzwania 28</i> | 1082 |

| Program 29 | Prawdopodobieństwo | 1085 |
|---|---------------------------|-------------|
| <i>Czego się nauczę z tego programu?</i> | | 1085 |
| Prawdopodobieństwo | | 1086 |
| Doświadczenia losowe - Zdarzenia - Seria doświadczeń losowych - Łączenie zdarzeń | | |
| Zdarzenia i prawdopodobieństwa | | 1088 |
| Prawdopodobieństwo - Przypisywanie prawdopodobieństw - Podsumowanie | | |
| Prawdopodobieństwa zdarzeń łączonych | | 1091 |
| Lub - Zdarzenia niewykluczające się wzajemnie - I - Zdarzenia zależne - Zdarzenia niezależne - Drzewka prawdopodobieństwa - Podsumowanie | | |
| Prawdopodobieństwo warunkowe | | 1096 |
| Rozkłady prawdopodobieństwa | | 1099 |
| Zmienne losowe - Wartość oczekiwana - Wariancja i odchylenie standardowe - Próby Bernoulliego - Rozkład dwumianowy prawdopodobieństwa - Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe - Rozkład prawdopodobieństwa Poissona - Porównanie rozkładu dwumianowego i Poissona | | |
| Ciągłe rozkłady prawdopodobieństwa | | 1115 |
| Krzywa rozkładu normalnego (lub krzywa normalna) | | |
| Standaryzowana krzywa normalna | | 1115 |
| Podsumowanie | | |
| <i>Czy potrafisz? Lista kontrolna 29</i> | | 1121 |
| <i>Zadania sprawdzające 29</i> | | 1122 |
| <i>Dalsze wyzwania 29</i> | | 1123 |
| | | |
| <i>Odpowiedzi</i> | | 1126 |
| <i>Indeks</i> | | 1153 |