K.A. Stroud
Dexter J. Booth

MATEMATYKA INŻYNIERSKA
POZIOM ZAAWANSOWANY

WYDANIE VI

Z języka angielskiego przełożył

Szymon Wąsowicz

Pętla

Tytuł oryginału: Advanced Engineering Mathematics (8th Edition)

Copyright © K.A. Stroud, Dexter Booth 2020
This translation of Advanced Engineering Mathematics, 6th edition is published by arrangement with Bloomsbury Publishing Plc.
Copyright © for the translation by Pętla Sp. z o.o. 2023
Copyright © for the Polish edition by Pętla Sp. z o.o. 2023

Wszystkie prawa zastrzeżone. Kopiowanie i rozpowszechnianie całości albo fragmentów tej książki – z wyjątkiem cytatów w artykułach i przeglądach krytycznych – możliwe jest tylko na podstawie pisemnej zgody właściciela praw autorskich.

REVIEW BOARD FOR THE SIXTH EDITION:
Declan Bates, Professor of Bioengineering, School of Engineering, University of Warwick, UK
Stewart Chidlow, Senior Lecturer in Applied Mathematics, School of Applied Mathematics, Liverpool John Moores University, UK
Patrick Johnson, Senior Lecturer in Mathematics, Department of Engineering and Mathematics, Sheffield Hallam University, UK
Colin Steele, Director of Service Teaching, Department of Mathematics, University of Manchester, UK

Tłumaczenie **Szymon Wąsowicz**
Redakcja **Agnieszka Jarosz**
Oprawa graficzna i skład **Marta Dobrzyńska**

ISBN 978-83-944283-3-4

Pętla Sp. z o.o.
http://www.stroud.edu.pl/
www.facebook.com/matematykastroud/
info@stroud.edu.pl
tel. 508 270 779



Skrócony spis treści

Przedmowa do pierwszego wydania *xxi*
Przedmowa do szóstego wydania *xxii*
Jak korzystać z tej książki *xxiv*
Przydatne informacje *xxv*

1 Numeryczne rozwiązywanie równań i interpolacja 1
2 Transformaty Laplace'a 1 43
3 Transformaty Laplace'a 2 85
4 Transformaty Laplace'a 3 112
5 Równania różnicowe i transformata *Z* 140
6 Wprowadzenie do niezmienniczych układów liniowych 174
7 Szeregi Fouriera 1 213
8 Szeregi Fouriera 2 240
9 Wprowadzenie do transformat Fouriera 266
10 Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych w postaci szeregów potęgowych 1 299
11 Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych w postaci szeregów potęgowych 2 318
12 Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych w postaci szeregów potęgowych 3 333
13 Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych 350
14 Algebra macierzy 383
15 Układy równań różniczkowych zwyczajnych 421
16 Pola kierunków 448
17 Analiza płaszczyzny fazowej 472
18 Układy równań nieliniowych 510
19 Układy dynamiczne 528
20 Pochodne cząstkowe 561
21 Równania różniczkowe cząstkowe 598
22 Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych 630
23 Całki funkcji wielu zmiennych 1 671
24 Całki funkcji wielu zmiennych 2 714
25 Funkcje określone przez całki 750
26 Analiza wektorowa 1 781
27 Analiza wektorowa 2 821
28 Analiza wektorowa 3 865
29 Analiza zespolona 1 888
30 Analiza zespolona 2 921
31 Analiza zespolona 3 961
32 Optymalizacja i programowanie liniowe 989

Dodatek 1011
Odpowiedzi 1019
Indeks 1055

Spis treści

Przedmowa do pierwszego wydania *xxi*
Przedmowa do szóstego wydania *xxii*
Jak korzystać z tej książki *xxiv*
Przydatne informacje *xxv*

Program 1 Numeryczne rozwiązywanie równań i interpolacja 1

Czego się nauczę z tego programu? 1
Wprowadzenie 2
Zasadnicze twierdzenie algebry 2
Związki między współczynnikami a pierwiastkami równania wielomianowego 4
Równania sześcienne 7
Przekształcanie równania sześciennego do postaci zredukowanej 7
Metoda Tartaglii dla pierwiastka rzeczywistego 8
Metody numeryczne 9
Metoda połowienia 9
Numeryczne rozwiązywanie równań przez iterację 11
Zastosowanie arkusza kalkulacyjnego 11
Adresy względne 13
Metoda iteracyjna Newtona-Raphsona 13
Tabelaryczne przedstawienie wyników 15
Zmodyfikowana metoda Newtona-Raphsona 19
Interpolacja 22
Interpolacja liniowa 23
Interpolacja graficzna 23
Wzór interpolacyjny Gregory'ego-Newtona z różnicami progresywnymi 24
Różnice centralne 28
Różnice wsteczne Gregory'ego-Newtona 30
Interpolacja Lagrange'a 32

Podsumowanie 1 35
Czy potrafisz? Lista kontrolna 1 37
Zadania sprawdzające 1 38
Dalsze wyzwania 1 39

Program 2 Transformaty Laplace'a 1 43

Czego się nauczę z tego programu? 43
Wprowadzenie 44
Transformaty Laplace'a 44
Różniczkowanie i całkowanie transformat 50
Twierdzenie 1: Pierwsze twierdzenie o przesunięciu 50
Twierdzenie 2: Mnożenie przez t oraz t^n 51
Twierdzenie 3: Dzielenie przez t 52
Transformaty odwrotne 56

Zasady rozkładu na ułamki proste 57
Metoda zakrywania 62
Tabela transformat odwrotnych 63
Rozwiązywanie równań różniczkowych z zastosowaniem transformat Laplace'a 64
Transformaty pochodnych 64
Rozwiązywanie równań różniczkowych pierwszego rzędu 66
Rozwiązywanie równań różniczkowych drugiego rzędu 68
Układy równań różniczkowych 74
Podsumowanie 2 **79**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 2 **82**
Zadania sprawdzające 2 **82**
Dalsze wyzwania 2 **83**

Program 3 Transformaty Laplace'a 2 **85**

Czego się nauczę z tego programu? **85**
Wprowadzenie 86
Funkcja skokowa Heaviside'a 86
Funkcja skokowa w zerze 87
Co daje zastosowanie funkcji skokowej? 87
Transformata Laplace'a funkcji $u(t-c)$ 90
Transformata Laplace'a funkcji $u(t-c)\cdot f(t-c)$ (drugie twierdzenie o przesunięciu) 90
Równania różniczkowe zawierające funkcje skokowe 99
Splot 102
Twierdzenie o splocie 106
Podsumowanie 3 **108**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 3 **109**
Zadania sprawdzające 3 **109**
Dalsze wyzwania 3 **110**

Program 4 Transformaty Laplace'a 3 **112**

Czego się nauczę z tego programu? **112**
Transformaty Laplace'a funkcji okresowych 113
Funkcje okresowe 113
Transformaty odwrotne 118
Delta Diraca – impuls jednostkowy 121
Interpretacja graficzna 122
Transformata Laplace'a delty Diraca $\delta(t-a)$ 123
Pochodna funkcji skokowej Heaviside'a 125
Równania różniczkowe zawierające impuls jednostkowy 126
Oscylatory harmoniczne 128
Ruch drgający tłumiony 130
Ruch harmoniczny wymuszony z tłumieniem 132
Rezonans 134
Podsumowanie 4 **136**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 4 **137**
Zadania sprawdzające 4 **138**

Dalsze wyzwania 4 **138**

Program 5 Równania różnicowe i transformata *Z* **140**

Czego się nauczę z tego programu? **140**
Wprowadzenie 141
Ciągi 142
Równania różnicowe 142
Rozwiązywanie równań różnicowych 144
Rozwiązywanie przez ogląd 144
Rozwiązanie szczególne 147
Transformata *Z* 150
Tabela transformat *Z* 154
Własności transformat *Z* 154
Liniowość 154
Pierwsze twierdzenie o przesunięciu (przesuwanie w lewo) 155
Drugie twierdzenie o przesunięciu (przesuwanie w prawo) 156
Skalowanie 157
Twierdzenie o wartości końcowej 157
Twierdzenie o wartości początkowej 158
Pochodna transformaty 158
Transformaty odwrotne 159
Rozwiązywanie równań różnicowych 162
Próbkowanie 165
Podsumowanie 5 **167**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 5 **169**
Zadania sprawdzające 5 **170**
Dalsze wyzwania 5 **171**

Program 6 Wprowadzenie do niezmienniczych układów liniowych **174**

Czego się nauczę z tego programu? **174**
Liniowe układy niezmiennicze 175
Układy 175
Relacja typu wejście-odpowiedź 176
Układy liniowe 177
Niezmienniczość w czasie układu ciągłego 179
Niezmienniczość układu dyskretnego ze względu na przesunięcia 181
Równania różniczkowe 182
Ogólne równanie *n*-tego rzędu 182
Odpowiedź wejścia zerowego i odpowiedź stanu zerowego 183
Wejście zerowe, odpowiedź zerowa 186
Niezmienniczość w czasie 188
Odpowiedzi układu ciągłego 189
Odpowiedź impulsowa 189
Wejście dowolne 189
Splot 190
Odpowiedź wykładnicza 192

Transmitancja operatorowa $H(s)$ 194
Równania różniczkowe 196
Odpowiedzi układu dyskretnego 199
Dyskretny impuls jednostkowy 199
Wejście dowolne 200
Odpowiedź wykładnicza 201
Transmitancja impulsowa 202
Równania różnicowe 203
Podsumowanie 6 **206**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 6 **208**
Zadania sprawdzające 6 **210**
Dalsze wyzwania 6 **210**

Program 7 Szeregi Fouriera 1 **213**

Czego się nauczę z tego programu? **213**
Wprowadzenie 214
Funkcje okresowe 214
Wykresy funkcji postaci $y = A \sin nx$ 214
Harmoniki 215
Funkcje okresowe, które nie są sinusoidalne 216
Wyznaczanie wzorów analitycznych funkcji okresowych 216
Całki funkcji okresowych 220
Funkcje ortogonalne 222
Szeregi Fouriera 223
Warunki Dirichleta 226
Jak harmoniki wpływają na szereg Fouriera? 231
Efekt Gibbsa 233
Suma szeregu Fouriera w punkcie nieciągłości funkcji 233
Podsumowanie 7 **234**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 7 **235**
Zadania sprawdzające 7 **236**
Dalsze wyzwania 7 **237**

Program 8 Szeregi Fouriera 2 **240**

Czego się nauczę z tego programu? **240**
Funkcje parzyste, funkcje nieparzyste i szeregi Fouriera według cosinusów oraz według sinusów 241
Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste 241
Iloczyny funkcji parzystych i funkcji nieparzystych 243
Szeregi Fouriera według cosinusów oraz według sinusów 250
Szeregi zawierające tylko harmoniki o numerach parzystych lub tylko harmoniki o numerach nieparzystych. 253
Interpretacja wyrazu stałego $\frac{1}{2}a_0$ 255
Funkcje o okresach innych niż 2π 256
Funkcje o okresie T 256
Współczynniki Fouriera 256

Szeregi według cosinusów oraz według sinusów dla funkcji o dowolnym okresie 259
Podsumowanie 8 **262**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 8 **263**
Zadania sprawdzające 8 **264**
Dalsze wyzwania 8 **264**

Program 9 Wprowadzenie do transformat Fouriera 266

Czego się nauczę z tego programu? **266**
Zespolone szeregi Fouriera 267
Wprowadzenie 267
Zespolone funkcje wykładnicze 267
Widma sygnału 271
Dwa sposoby opisu przebiegów okresowych 272
Widma ciągłe 273
Wzór całkowy Fouriera 274
Transformaty Fouriera ważniejszych funkcji 276
Funkcje parzyste 276
Funkcje nieparzyste 277
Funkcja prostokątna 278
Delta Diraca 280
Funkcja trójkątna 281
Postaci alternatywne 282
Własności transformat Fouriera 282
Liniowość 282
Przesunięcie w czasie 283
Przesunięcie w częstotliwości 283
Skalowanie czasu 284
Symetria 284
Różniczkowanie 285
Funkcja skokowa Heaviside'a 286
Splot 287
Twierdzenie o splocie 288
Cosinusowe i sinusowe transformaty Fouriera 290
Tabela transformat 291
Podsumowanie 9 **292**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 9 **295**
Zadania sprawdzające 9 **296**
Dalsze wyzwania 9 **296**

Program 10 Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych w postaci szeregów potęgowych 1 299

Czego się nauczę z tego programu? **299**
Pochodne wyższych rzędów 300
Wzór Leibniza – pochodna *n*-tego rzędu iloczynu dwóch funkcji 303
Wybór funkcji *u* oraz *v* 304

Rozwiązania w postaci szeregów potęgowych 305
Metoda Leibniza-Maclaurina 306
Równania liniowe Eulera 311
Podsumowanie 10 **315**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 10 **316**
Zadania sprawdzające 10 **316**
Dalsze wyzwania 10 **316**

Program 11 Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych w postaci szeregów potęgowych 2 **318**

Czego się nauczę z tego programu? **318**
Wprowadzenie 319
Rozwiązywanie równań różniczkowych metodą Frobeniusa 319
Równanie indeksowe 326
Podsumowanie 11 **331**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 11 **331**
Zadania sprawdzające 11 **332**
Dalsze wyzwania 11 **332**

Program 12 Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych w postaci szeregów potęgowych 3 **333**

Czego się nauczę z tego programu? **333**
Wprowadzenie 334
Równanie Bessela 334
Funkcja gamma i funkcje Bessela 335
Wykresy funkcji Bessela $J_0(x)$ oraz $J_1(x)$ 339
Równanie Legendre'a 339
Wielomiany Legendre'a 340
Wzór Rodriguesa i funkcja tworząca 340
Zagadnienie Sturma-Liouville'a 342
Ortogonalność 344
Równanie Legendre'a raz jeszcze 345
Wielomiany jako kombinacje liniowe wielomianów Legendre'a 345
Podsumowanie 12 **346**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 12 **348**
Zadania sprawdzające 12 **348**
Dalsze wyzwania 12 **349**

Program 13 Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych **350**

Czego się nauczę z tego programu? **350**
Wprowadzenie 351
Szereg Taylora 351
Przyrost funkcji 352
Równania różniczkowe pierwszego rzędu 352
Metoda Eulera 352

Wartości dokładne i błędy 359
Interpretacja graficzna metody Eulera 362
Metoda Eulera-Cauchy'ego, czyli ulepszona metoda Eulera 364
Obliczenia metodą Eulera-Cauchy'ego 364
Metoda Rungego-Kutty 369
Równania różniczkowe drugiego rzędu 372
Metoda Eulera drugiego rzędu 372
Metoda Rungego-Kutty dla równań różniczkowych drugiego rzędu 374
Metoda predyktor-korektor 378
Podsumowanie 13 **380**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 13 **381**
Zadania sprawdzające 13 **382**
Dalsze wyzwania 13 **382**

Program 14 Algebra macierzy 384

Czego się nauczę z tego programu? **384**
Macierze osobliwe i nieosobliwe 385
Rząd macierzy 386
Operacje elementarne i macierze równoważne 387
Zgodność układu równań liniowych 390
Jednoznaczność rozwiązania 391
Rozwiązywanie układów równań liniowych 394
Metoda macierzy odwrotnej 394
Metoda przekształcania wierszy 397
Metoda eliminacji niewiadomych Gaussa 401
Metoda rozkładu na iloczyn macierzy trójkątnych (rozkładu LU) 403
Zastosowanie arkusza kalkulacyjnego 408
Porównanie metod 412
Przekształcenia układów współrzędnych 413
Obrót układu współrzędnych 414
Podsumowanie 14 **416**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 14 **418**
Zadania sprawdzające 14 **418**
Dalsze wyzwania 14 **419**

Program 15 Układy równań różniczkowych zwyczajnych 421

Czego się nauczę z tego programu? **421**
Wartości własne macierzy 2×2 422
Równania charakterystyczne 422
Suma i iloczyn wartości własnych 423
Wektory własne 423
Układy liniowych równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu 426
Identyczne wartości własne 430
Diagonalizacja macierzy 436
Macierz modalna 436
Macierz spektralna 436

Układy liniowych równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu 440
Podsumowanie 15 **444**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 15 **445**
Zadania sprawdzające 15 **446**
Dalsze wyzwania 15 **446**

Program 16 Pola kierunków **448**

Czego się nauczę z tego programu? **448**
Równania różniczkowe 449
Wprowadzenie 449
Rodzina rozwiązań szczególnych 449
Pola kierunków 451
Program DFIELD 453
Wprowadzenie 453
Rozwiązanie szczególne 454
Rodzina rozwiązań szczególnych 455
Autonomiczne równania różniczkowe 456
Rozwiązania równowagi 457
Linia fazowa 459
Równania nieautonomiczne 464
Wprowadzenie 464
Podsumowanie 16 **468**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 16 **469**
Zadania sprawdzające 16 **469**
Dalsze wyzwania 16 **470**

Program 17 Analiza płaszczyzny fazowej **472**

Czego się nauczę z tego programu? **472**
Analiza płaszczyzny fazowej 473
Wprowadzenie 473
Wahadło sprężynowe 473
Program PPLANE 475
Analiza płaszczyzny fazowej 478
Wartości własne a płaszczyzna fazowa 478
Urojone wartości własne 478
Zespolone wartości własne 483
Co dzieje się wokół punktu krytycznego? 486
Dwie rzeczywiste ujemne wartości własne 487
Co dzieje się wokół punktu krytycznego? 488
Dwie rzeczywiste dodatnie wartości własne 491
Dwie rzeczywiste wartości własne różnych znaków 494
Dwie identyczne wartości własne 497
Węzeł gwiaździsty 498
Osobliwa macierz współczynników 499
Niejednorodny układ równań 500
Przesunięcie punktu krytycznego do początku układu współrzędnych 501

Podsumowanie 17 **504**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 17 **506**
Zadania sprawdzające 17 **506**
Dalsze wyzwania 17 **507**

Program 18 Układy równań nieliniowych **510**

Czego się nauczę z tego programu? **510**
Układy równań różniczkowych z wieloma punktami krytycznymi 511
Wprowadzenie 511
Linearyzacja 514
Problemy z linearyzacją 521
Podsumowanie 18 **525**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 18 **525**
Zadania sprawdzające 18 **526**
Dalsze wyzwania 18 **526**

Program 19 Układy dynamiczne **528**

Czego się nauczę z tego programu? **528**
Układy dynamiczne 529
Wprowadzenie 529
Zagadnienia typu drapieżnik-ofiara 529
Współzawodnictwo w pojedynczej populacji 531
Dwie populacje bez wzajemnych interakcji 532
Dwie populacje z wzajemnymi interakcjami 534
Równania różniczkowe drugiego rzędu 540
Wahadło nietłumione – małe odchylenia 540
Wahadło nietłumione – brak aproksymacji 541
Wahadło tłumione 543
Bifurkacja 546
Równania pierwszego rzędu 546
Równania drugiego rzędu 550
Cykle graniczne 551
Równanie van der Pola 553
Podsumowanie 19 **555**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 19 **555**
Zadania sprawdzające 19 **556**
Dalsze wyzwania 19 **556**

Program 20 Pochodne cząstkowe **561**

Czego się nauczę z tego programu? **561**
Małe przyrosty 562
Wzór Taylora dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej 562
Wzór Taylora dla funkcji dwóch zmiennych rzeczywistych 562
Małe przyrosty 563
Tempo zmiany wartości funkcji 565
Funkcje uwikłane 566

Zamiana zmiennych 566
Funkcje odwrotne 570
Przypadek ogólny 572
Punkty stacjonarne funkcji dwóch zmiennych 577
Maksima i minima lokalne 578
Punkt siodłowy 583
Metoda współczynników nieoznaczonych Lagrange'a 588
Funkcje trzech zmiennych rzeczywistych 590
Podsumowanie 20 593
Czy potrafisz? Lista kontrolna 20 594
Zadania sprawdzające 20 595
Dalsze wyzwania 20 596

Program 21 Równania różniczkowe cząstkowe 598

Czego się nauczę z tego programu? 598
Wprowadzenie 599
Równania różniczkowe cząstkowe 599
Rozwiązywanie przez bezpośrednie całkowanie 599
Warunki początkowe i warunki brzegowe 601
Równanie struny 602
Rozwiązanie równania struny 602
Rozwiązanie metodą rozdzielania zmiennych 602
Równanie przewodnictwa cieplnego dla jednorodnego pręta ograniczonego 610
Rozwiązanie równania przewodnictwa cieplnego 611
Równanie Laplace'a 615
Rozwiązanie równania Laplace'a 615
Równanie Laplace'a we współrzędnych biegunowych 619
Problem 620
Rozdzielenie zmiennych 620
Przypadek $n = 0$ 623
Podsumowanie 21 625
Czy potrafisz? Lista kontrolna 21 626
Zadania sprawdzające 21 627
Dalsze wyzwania 21 628

Program 22 Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych 630

Czego się nauczę z tego programu? 630
Wprowadzenie 631
Numeryczna aproksymacja pochodnych 631
Funkcje dwóch zmiennych rzeczywistych 633
Wartości w punktach siatki 634
Gwiazdy różnicowe 636
Podsumowanie metody 639
Warunki brzegowe zawierające pochodne cząstkowe 642
Równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu 646

Równania eliptyczne 646
Równania hiperboliczne 646
Równania paraboliczne 646
Pochodne cząstkowe drugiego rzędu 648
Równania zależne od czasu 651
Metoda Cranka-Nicolsona 656
Analiza wymiarowa 661
Podsumowanie 22 **662**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 22 **664**
Zadania sprawdzające 22 **665**
Dalsze wyzwania 22 **666**

Program 23 Całki funkcji wielu zmiennych 1 **671**

Czego się nauczę z tego programu? **671**
Wprowadzenie 672
Różniczki 678
Różniczka zupełna 680
Całkowanie różniczek zupełnych 682
Obszary ograniczone krzywymi zamkniętymi 683
Całki krzywoliniowe skierowane 687
Alternatywna postać całki krzywoliniowej skierowanej 687
Własności całek krzywoliniowych skierowanych 690
Obszary ograniczone krzywymi zamkniętymi 692
Całki krzywoliniowe skierowane wzdłuż krzywych zamkniętych 692
Całki krzywoliniowe nieskierowane 696
Krzywe określone równaniami parametrycznymi 697
Niezależność całki krzywoliniowej skierowanej od drogi całkowania 698
Różniczka zupełna funkcji trzech zmiennych 702
Twierdzenie Greena 703
Podsumowanie 23 **709**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 23 **711**
Zadania sprawdzające 23 **712**
Dalsze wyzwania 23 **712**

Program 24 Całki funkcji wielu zmiennych 2 **714**

Czego się nauczę z tego programu? **714**
Całki podwójne 715
Całka powierzchniowa niezorientowana 719
Układy współrzędnych w przestrzeni trójwymiarowej 724
Współrzędne kartezjańskie 724
Współrzędne walcowe 724
Współrzędne sferyczne 725
Element objętości w trzech rodzajach współrzędnych 727
Całki potrójne 728
Zamiana zmiennych w całkach wielokrotnych 735

Współrzędne krzywoliniowe 737
Zamiana zmiennych w trzech wymiarach 743
Podsumowanie 24 **744**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 24 **747**
Zadania sprawdzające 24 **747**
Dalsze wyzwania 24 **748**

Program 25 Funkcje określone przez całki **750**

Czego się nauczę z tego programu? **750**
Funkcje gamma oraz beta 751
Funkcja gamma 751
Funkcja beta 758
Wzory rekurencyjne 759
Związek pomiędzy funkcjami gamma i beta 761
Zastosowania funkcji gamma oraz beta 763
Wzór Legendre'a o podwajaniu 765
Funkcja błędu 766
Wykres funkcji $\mathrm{erf}(x)$ 767
Uzupełniająca funkcja błędu $\mathrm{erf}(x)$ 767
Funkcje eliptyczne 769
Standardowe postaci funkcji eliptycznych 769
Całki eliptyczne zupełne 770
Alternatywne postaci funkcji eliptycznych 773
Podsumowanie 25 **776**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 25 **777**
Zadania sprawdzające 25 **778**
Dalsze wyzwania 25 **779**

Program 26 Analiza wektorowa 1 **781**

Czego się nauczę z tego programu? **781**
Wprowadzenie 782
Iloczyny potrójne 786
Iloczyn skalarny trzech wektorów (iloczyn mieszany) 786
Własności iloczynu mieszanego 787
Wektory komplanarne 788
Potrójne iloczyny wektorowe 789
Różniczkowanie wektorów 793
Różniczkowanie sum i iloczynów wektorów 796
Jednostkowy wektory styczny 797
Pochodne cząstkowe funkcji wektorowej 799
Całkowanie funkcji wektorowych 800
Pola skalarne i wektorowe 801
Gradient funkcji skalarnej 802
Pochodne kierunkowe 804
Jednostkowy wektory normalny 807
Gradienty sumy i iloczynu funkcji skalarnych 808

Dywergencja funkcji wektorowej 810
Rotacja funkcji wektorowej 810
Podsumowanie wiadomości o gradiencie, dywergencji i rotacji 812
Złożenia operatorów gradientu, dywergencji i rotacji 813
Podsumowanie 26 **815**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 26 **817**
Zadania sprawdzające 26 **818**
Dalsze wyzwania 26 **819**

Program 27 Analiza wektorowa 2 **821**

Czego się nauczę z tego programu? **821**
Całki krzywoliniowe 822
Pole skalarne 822
Pole wektorowe 824
Całki potrójne 828
Całki powierzchniowe 832
Pole skalarne 832
Pole wektorowe 835
Zachowawcze pola wektorowe 839
Wzór Gaussa-Ostrogradskiego 843
Wzór Stokesa 849
Zwrot jednostkowego wektora normalnego do powierzchni S a obieg na ograniczającej ją krzywej c 851
Twierdzenie Greena 856
Podsumowanie 27 **859**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 27 **861**
Zadania sprawdzające 27 **862**
Dalsze wyzwania 27 **862**

Program 28 Analiza wektorowa 3 **865**

Czego się nauczę z tego programu? **865**
Współrzędne krzywoliniowe 866
Ortogonalne współrzędne krzywoliniowe 869
Ortogonalne układy współrzędnych w przestrzeni 870
Współczynniki skali 873
Współczynniki skali dla współrzędnych kartezjańskich, walcowych i sferycznych 874
Dowolne układy współrzędnych krzywoliniowych (u, v, w) 876
Równania przejścia 877
Element łuku $\mathrm{d}s$ oraz element objętości $\mathrm{d}V$ w układzie ortogonalnych współrzędnych krzywoliniowych 877
Gradient, dywergencja, rotacja i laplasjan w układzie ortogonalnych współrzędnych krzywoliniowych 878
Gradient, dywergencja i laplasjan we współrzędnych kartezjańskich, walcowych i sferycznych 881

Podsumowanie 28 **883**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 28 **885**
Zadania sprawdzające 28 **886**
Dalsze wyzwania 28 **886**

Program 29 Analiza zespolona 1 **888**

Czego się nauczę z tego programu? **888**
Funkcje zmiennej zespolonej 889
Odwzorowanie zespolone 890
Wyznaczanie obrazu linii prostej leżącej na płaszczyźnie w odwzorowaniu $w = f(z)$ 891
Typy odwzorowań postaci $w = az + b$ 895
Odwzorowania nieliniowe 902
Wyznaczanie obrazów obszarów 906
Podsumowanie 29 **917**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 29 **918**
Zadania sprawdzające 29 **918**
Dalsze wyzwania 29 **919**

Program 30 Analiza zespolona 2 **921**

Czego się nauczę z tego programu? **921**
Różniczkowanie funkcji zmiennej zespolonej 922
Funkcja analityczna 923
Równania Cauchy'ego-Riemanna 925
Funkcje harmoniczne 926
Całkowanie funkcji zespolonych 930
Całki po konturach, czyli całki krzywoliniowe na płaszczyźnie z 930
Twierdzenie Cauchy'ego 933
Deformacja konturu w punkcie osobliwym 937
Odwzorowania konforemne 943
Warunki konforemności odwzorowania 944
Punkty krytyczne 944
Odwzorowanie Schwarza-Christoffela 947
Wielokąty otwarte 951
Podsumowanie 30 **956**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 30 **958**
Zadania sprawdzające 30 **959**
Dalsze wyzwania 30 **959**

Program 31 Analiza zespolona 3 **961**

Czego się nauczę z tego programu? **961**
Szeregi Maclaurina 962
Promień zbieżności 965
Punkty osobliwe 966
Bieguny 966

Punkty pozornie osobliwe 967
Koło zbieżności 967
Szereg Taylora 968
Szereg Laurenta 969
Residua 973
Obliczanie residuów 975
Całki funkcji rzeczywistych 976
Całki postaci $\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 977
Całki postaci $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$ 978
Całki postaci $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\begin{Bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{Bmatrix}\mathrm{d}x$ 980
Podsumowanie 31 **982**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 31 **985**
Zadania sprawdzające 31 **986**
Dalsze wyzwania 31 **987**

Program 32 Optymalizacja i programowanie liniowe 989

Czego się nauczę z tego programu? **989**
Optymalizacja 990
Programowanie liniowe (optymalizacja liniowa) 990
Nierówności liniowe 990
Graficzna reprezentacja nierówności liniowych 991
Solver 996
Parametry Solvera 997
Zastosowania 1001
Programowanie nieliniowe 1003
Podsumowanie 32 **1005**
Czy potrafisz? Lista kontrolna 32 **1006**
Zadania sprawdzające 32 **1006**
Dalsze wyzwania 32 **1007**

Dodatek 1011
Odpowiedzi 1019
Indeks 1055